

# Introducción al Álgebra

## Control 1 - Puntos Problemas 1

Puede demostrarse usando tautologías o propiedades conocidas.

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)]$$

$$\Leftrightarrow [(\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{r} \vee s)] \Rightarrow [\bar{p} \wedge \bar{r} \vee (q \wedge s)] \quad \text{Definición de } \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\bar{p} \vee q \vee \bar{r} \vee s] \vee [\bar{p} \wedge \bar{r} \vee (q \wedge s)] \quad \text{Definición de } \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \bar{q}) \vee (r \wedge \bar{s}) \vee \bar{p} \vee \bar{r} \vee (q \wedge s) \quad \text{Leyes de Morgan} \rightarrow (20)$$

$$\Leftrightarrow \{(p \wedge \bar{q}) \vee \bar{p}\} \vee \{(r \wedge \bar{s}) \vee \bar{r}\} \vee (q \wedge s) \quad \text{Asociatividad}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\{(\bar{p} \vee p) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})\}}_{\vee} \vee \underbrace{\{(\bar{r} \vee r) \wedge (\bar{r} \vee \bar{s})\}}_{\vee} \vee (q \wedge s) \quad \text{Distributividad}$$

$$\Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q}) \vee (\bar{r} \vee \bar{s}) \vee (q \wedge s) \quad \bar{p} \vee p \wedge \bar{r} \vee r \text{ son tautologías} \rightarrow (20)$$

$$\Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r} \vee \{\bar{s} \vee (q \wedge s)\} \quad \text{Asociatividad.}$$

$$\Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r} \vee \{\bar{s} \vee q\} \wedge \underbrace{\{\bar{s} \vee s\}}_{\vee} \quad \bar{s} \vee s \Leftrightarrow V$$

$$\Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r} \vee \bar{s} \vee q$$

$$\Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{r} \vee \bar{s} \vee \underbrace{\bar{q} \vee q}_{\vee} \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{r} \vee \bar{s}) \vee V \Leftrightarrow V \rightarrow (20)$$

OBSERVACIÓN: También <sup>se</sup> puede, por inspección:  
Si se supone que  $[(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)]$  es Falso, concluir que  $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)]$  es también Falso

## Pauta Problems 2

i) Si  $A \subseteq C \wedge B \subseteq D$  dem q'  $(A \cap B) \subseteq (C \cap D)$

En efecto, por elementos, sea  $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$

y por hipótesis como  $A \subseteq C \wedge B \subseteq D$  entonces

$$x \in A \Rightarrow x \in C \wedge x \in B \Rightarrow x \in D \longrightarrow (10)$$

$$\text{Así } x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in C \wedge x \in D$$

$$\Rightarrow x \in C \cap D$$

$$\text{Significa que } (A \cap B) \subseteq (C \cap D) \longrightarrow (05)$$

ii)  $X, C, D$  conjuntos

$$X \subseteq C \wedge X \subseteq D \Leftrightarrow X \subseteq (C \cap D)$$

$$(\Rightarrow) \text{ Usando (i) } X \subseteq C \wedge X \subseteq D \Rightarrow (X \cap X) \subseteq (C \cap D)$$

$$\Rightarrow X \subseteq (C \cap D) \longrightarrow (10)$$

$$(\Leftarrow) \text{ Por elementos. Sea } x \in X \Rightarrow x \in (C \cap D) \Rightarrow x \in C \wedge x \in D$$

$$\Rightarrow X \subseteq C \wedge X \subseteq D$$

También (otra forma) es inmediato que  $\left. \begin{array}{l} C \cap D \subseteq C \\ C \cap D \subseteq D \end{array} \right\}$

$$\text{Así } X \subseteq C \cap D \Rightarrow X \subseteq C \wedge X \subseteq D \longrightarrow (10)$$

iii) Sea  $X \in \mathcal{P}(C \cap D) \Leftrightarrow X \subseteq C \cap D$  Definición

$$\Leftrightarrow X \subseteq C \wedge X \subseteq D$$

Según (ii)

$$\Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(C) \wedge X \in \mathcal{P}(D)$$

Definición.

$$\Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(C) \cap \mathcal{P}(D)$$

Definición de  $\cap$

$$\text{Así } \mathcal{P}(C \cap D) = \mathcal{P}(C) \cap \mathcal{P}(D) \longrightarrow (15)$$